# Предел функции.

**Определение 1.** *Если каждому значению переменной $x$ из множества $X$ ставится в соответствие по известному закону некоторое (единственное) число $y \in Y \subset \mathbb{R}$, то говорят, что на множестве $X$ задана* **функция** *$y = f(x)$.*

*Число $x$ называется* **аргументом** *или* **независимой переменной**; *множество $X$ —* **областью определения** *функции; число $y = f(x)$ —* **(частным) значением** *функции в точке $x$; множество $Y = f(X)$ —* **областью изменения** *или* **множеством значений** *функции $f(x)$.*

**Замечание 1.** *Строго говоря, функция — это* **отображение**, *то есть подмножество $f$ декартова произведения $X \times Y$ такое, что для любого $x \in X$ существует единственная пара $(x, y) \in f$.*

**Определение 2.** *Множество $B_\delta(a)\backslash\{a\} = (a-\delta, a)\cup(a, a+\delta)$ будем называть* **проколотой окрестностью** *точки $a$ и обозначать $\overset{\circ}{B}_\delta(a)$*

Пусть функция $y = f(x)$ определена на множестве $X$, $a$ — предельная точка $X$.

**Определение 3. (Предел функции по Гейне).** *Число $b \in \mathbb{R}$ ($b = \pm\infty$) называется* **пределом** *или* **предельным значением** *функции $y = f(x)$ в точке $a$, если для любой последовательности $\{x_n\}$ аргументов функции, такой, что $\{x_n\}$ сходится к $a$, но $x_n \neq a$ $\forall n \in \mathbb{N}$, соответствующая последовательность $\{f(x_n)\}$ значений функции сходится к $b$ (к $\pm\infty$).*

**Определение 4. (Предел функции по Коши).** *Число $b \in \mathbb{R}$ ($b = +\infty, -\infty$) называется* **пределом** *или* **предельным значением** *функции $y = f(x)$ в точке $a$, если для любого числа $\varepsilon > 0$ найдется вещественное $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что для любого $x$ из множества $\overset{\circ}{B}_\delta(a) \cap X$ выполняется неравенство $|f(x) - b| < \varepsilon$ ($f(x) > \varepsilon, \quad f(x) < -\varepsilon$).*

Обозначения: $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$ или $f(x) \underset{x \to a}{\to} b$.

**Теорема 1.** *Определения предела функции по Гейне и по Коши эквивалентны.*

*Доказательство.* 1) Предположим, что выполнено определение предела по Коши. Выберем произвольную последовательность $\{x_n\}$ аргументов, такую, что $\{x_n\}$ сходится к $a$, но $x_n \neq a$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Пусть $\varepsilon > 0$ — некоторое вещественное число. Тогда (в силу определения по Коши) существует положительное число $\delta = \delta(\varepsilon)$ такое, что для любой точки $x \in \overset{\circ}{B}_\delta(a) \cap X$ выполнено неравенство $|f(x) - b| < \varepsilon$. Так как $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = a$ и $x_n \neq a$, то найдется натуральный номер $N = N(\delta)$ такой, что $0 < |x_n - a| < \delta$, то есть $x \in \overset{\circ}{B}_\delta(a) \cap X$ при всех $n \geqslant N$. Значит, для любого $n \geqslant N$ выполняется неравенство $|f(x_n) - b| < \varepsilon$, следовательно, последовательность $\{f(x_n)\}$ сходится к $b$. Мы показали, что, если выполнено определение предела функции по Коши, то выполнено и определение по Гейне.

2) Предположим теперь, что определение по Коши не выполнено. Это означает, что существует такое вещественное число $\varepsilon > 0$, что для любого $\delta \in \mathbb{R}$ найдется точка

$x \in \overset{\circ}{B}_\delta(a) \cap X$, для которой будет иметь место неравенство $|f(x) - b| \geqslant \varepsilon$. Обозначим $\delta_n = \dfrac{1}{n}$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Получим, что для любого натурального $n$ существует точка $x_n \in X$ такая, что $0 < |x_n - a| < \dfrac{1}{n}$, но $|f(x_n) - b| \geqslant \varepsilon$. Это означает, что последовательность $\{x_n\}$ аргументов сходится к $a$, но соответствующая последовательность $\{f(x_n)\}$ значений функции не сходится к $b$. Значит, число $b$ не является пределом функции и в смысле определения по Гейне. □

**Пример 1.** *1) Рассмотрим функцию $f(x) = x$. Пусть $a \in \mathbb{R}$ — произвольное число. Тогда $\lim\limits_{x\to a} f(x) = a$, так как для любой последовательности $\{x_n\}$ аргументов, такой, что $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = a$, будет выполнено: $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n) = \lim\limits_{n\to+\infty} x_n = a$.*

*2) Пусть $D(x) = \begin{cases} 1, \ x - \text{рациональное}, \\ 0, \ x - \text{иррациональное} \end{cases}$ — функция Дирихле. Покажем, что она не имеет предела ни в одной точке. Действительно, пусть $a \in \mathbb{R}$. Тогда существует такая последовательность $\{x'_n\}$, что $\lim\limits_{n\to+\infty} x'_n = a$, $x'_n \neq a$, $x'_n$ — рациональное, и существует последовательность $\{x''_n\}$, такая, что $\lim\limits_{n\to+\infty} x''_n = a$, $x''_n \neq a$, $x''_n$ — иррациональное. Тогда $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x'_n) = 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x''_n) = 0$. Значит, согласно определению по Гейне, функция $f(x)$ не имеет предела в точке $a$.*

**Определение 5. (Гейне).** *Число $b \in \mathbb{R}$ или $b = \pm\infty$ называется **правым (левым) пределом** функции $y = f(x)$ в точке $a$, если для любой последовательности $\{x_n\}$ аргументов функции, такой, что $\{x_n\}$ сходится к $a$ и $x_n > a$ ($x_n < a$) $\forall n \in \mathbb{N}$, соответствующая последовательность $\{f(x_n)\}$ значений функции сходится к $b$ или к $\pm\infty$.*

**Определение 6. (Коши).** *Число $b \in \mathbb{R}$ или $b = +\infty, -\infty$ называется **правым (левым) пределом** функции $y = f(x)$ в точке $a$, если для любого числа $\varepsilon > 0$ найдется вещественное $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что для любого $x$ из множества $(a, a+\delta) \cap X$ $((a-\delta, a) \cap X)$ выполняется неравенство $|f(x) - b| < \varepsilon$ или $f(x) > \varepsilon$, $\quad f(x) < -\varepsilon$.*

Обозначения: $\lim\limits_{x\to a+0} f(x) = b$ ($\lim\limits_{x\to a-0} f(x) = b$) или $f(x) \underset{x\to a+0}{\to} b$ ($f(x) \underset{x\to a-0}{\to} b$) или $f(a+0) = b$ ($f(a-0) = b$).

Определения 5 и 6 эквивалентны.

**Пример 2.** *Рассмотрим функцию $f(x) = sgn x = \begin{cases} -1, \ x < 0, \\ \ \ 0, \ x = 0, \\ \ \ 1, \ x > 0. \end{cases}$ Очевидно, что $f(0+0) = 1$, $f(0-0) = -1$, $f(0) = 0$.*

Из определений предела по Коши сразу следует

**Утверждение 1.**

$$\lim_{x\to a} f(x) = b \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{x\to a-0} f(x) = \lim_{x\to a+0} f(x) = b.$$

**Определение 7. (Гейне).** *Число $b \in \mathbb{R}$ или $b = \pm\infty$ называется* ***пределом*** *функции $y = f(x)$* ***при*** *$x \to \infty$,* *$(x \to +\infty, x \to -\infty)$, если для любой последовательности $\{x_n\}$ аргументов функции, такой, что $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = \infty$ ($\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = +\infty$, $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = -\infty$), соответствующая последовательность $\{f(x_n)\}$ значений функции сходится к $b$ или к $\pm\infty$.*

**Определение 8. (Коши).** *Число $b \in \mathbb{R}$ или $b = +\infty, -\infty$ называется* ***пределом*** *функции $y = f(x)$* ***при*** *$x \to \infty$,* *$(x \to +\infty, x \to -\infty)$, если для любого числа $\varepsilon > 0$ найдется вещественное $A = A(\varepsilon) > 0$ такое, что для любого $x \in X$, для которого $|x| > A$ $(x > A,\ x < -A)$, выполняется неравенство $|f(x) - b| < \varepsilon$ или $f(x) > \varepsilon$, $\quad f(x) < -\varepsilon$.*

Обозначения: $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = b$ ($\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = b$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = b$).

Определения 7 и 8 эквивалентны.

**Определение 9.** *Функция $y = f(x)$ удовлетворяет в точке $a$* ***условию Коши****, если для любого числа $\varepsilon > 0$ найдется вещественное $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что для любых точек $x', x'' \in \overset{\circ}{B}_\delta(a) \cap X$ имеет место неравенство $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$.*

**Теорема 2. (Критерий Коши существования предела функции в точке).** *Функция $y = f(x)$ имеет в точке $a$ конечный предел тогда и только тогда, когда она удовлетворяет в этой точке условию Коши.*

*Доказательство. Необходимость.* Пусть $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$. Тогда найдется такое число $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, что для любой точки $x$ из множества $\overset{\circ}{B}_\delta(a) \cap X$ будет выполнено: $|f(x) - b| < \varepsilon/2$. Пусть $x', x'' \in \overset{\circ}{B}_\delta(a) \cap X$. Тогда

$$|f(x') - f(x'')| = |f(x') - b + b - f(x'')| \leqslant |f(x') - b| + |f(x'') - b| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon,$$

то есть функция $f(x)$ удовлетворяет условию Коши в точке $a$.

*Достаточность.* Предположим, что функция $f(x)$ удовлетворяет условию Коши в точке $a$. Выберем последовательность $\{x_n\}$ аргументов, такую, что $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = a$, $x_n \neq a$. Тогда найдется такой номер $N = N(\delta)$, что для любого натурального $n \geqslant N$ и любого натурального $p$ будут выполняться неравенства: $0 < |x_n - a| < \delta$, $0 < |x_{n+p} - a| < \delta$. В силу условия Коши имеем: $|f(x_{n+p}) - f(x_n)| < \varepsilon$ при всех $n \geqslant N$ и $p \in \mathbb{N}$. Но это означает, что числовая последовательность $\{f(x_n)\}$ является фундаментальной. Следовательно, она сходится.

Итак, мы показали, что для любой последовательности $\{x_n\}$ аргументов, такой, что $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = a$, $x_n \neq a$, соответствующая последовательность значений функции имеет предел. Докажем, что этот предел не зависит от выбора последовательности $\{x_n\}$. Пусть $\{x'_n\}$, $\{x''_n\}$ — две различные последовательности аргументов $f(x)$, удовлетворяющие условиям: $\lim\limits_{n\to+\infty} x'_n = a$, $x'_n \neq a$; $\lim\limits_{n\to+\infty} x''_n = a$, $x''_n \neq a$. Предположим, что $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x'_n) = b'$, $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x''_n) = b''$. Рассмотрим последовательность $\{x_n\} = \{x'_1, x''_1, x'_2, x''_2, \ldots, x'_n, x''_n, \ldots\}$. Очевидно, что $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = a$, $x_n \neq a$. Тогда последовательность $\{f(x_n)\}$ сходится. Обозначим $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n) = b$. Так как последовательности $\{f(x'_n)\}$, $\{f(x''_n)\}$ являются подпоследовательностями сходящейся последовательности $\{f(x_n)\}$, то они должны сходиться к тому же самому пределу. Значит, $b' = b'' = b$. Мы показали, что предел последовательности значений функции не зависит от выбора соответствующей последовательности ее аргументов. Это означает, что функция $f(x)$ имеет предел в точке $a$. $\square$

**Теорема 3.** *Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ заданы на множестве $X$, $a$ — предельная точка $X$, $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$, $\lim\limits_{x\to a} g(x) = c$. Тогда $\lim\limits_{x\to a}(f(x) \pm g(x)) = b \pm c$, $\lim\limits_{x\to a}(f(x) \cdot g(x)) = b \cdot c$, $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{b}{c}$ (в случае, если $c \neq 0$).*

*Доказательство.* Пусть $\{x_n\}$ — последовательность точек множества $X$, такая, что $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = a$, $x_n \neq a$. Тогда $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n) = b$, $\lim\limits_{n\to+\infty} g(x_n) = c$. Значит (по теореме об арифметических операциях над сходящимися последовательностями), $\lim\limits_{n\to+\infty}(f(x_n) \pm g(x_n)) = b \pm c$, $\lim\limits_{n\to+\infty}(f(x_n) \cdot g(x_n)) = b \cdot c$. Если $c \neq 0$, то, начиная с некоторого номера, $g(x_n) \neq 0$ и $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{f(x_n)}{g(x_n)} = \dfrac{b}{c}$. Но это означает, в силу определения предела по Гейне, что $\lim\limits_{x\to a}(f(x) \pm g(x)) = b \pm c$, $\lim\limits_{x\to a}(f(x) \cdot g(x)) = b \cdot c$, $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{b}{c}$. $\square$

## Бесконечно малые и бесконечно большие функции.

**Определение 10.** *Функция $\alpha(x)$ называется* **бесконечно малой** *в точке $a$, если $\lim\limits_{x\to a} \alpha(x) = 0$.*

Обозначение: $\alpha(x) = \bar{o}(1)$, $x \to a$. Читается: функция $\alpha(x)$ есть о малое от единицы при $x$, стремящемся к $a$ (или в точке $a$).

Пусть функции $\alpha(x)$, $\beta(x)$ определены на множестве $X$; $\alpha(x) = \bar{o}(1), x \to a$; $\beta(x) = \bar{o}(1)$, $x \to a$.

**Определение 11.** *Функция $\alpha(x)$ является в точке $a$* **бесконечно малой более высокого порядка**, *чем $\beta(x)$, если существует такая бесконечно малая в точке $a$ функция $\gamma(x)$, что $\alpha(x) = \gamma(x) \cdot \beta(x)$ при всех $x$, принадлежащих проколотой $\delta$-окрестности точки $a$ для некоторого $\delta > 0$.*

*Если $\beta(x) \neq 0$ при всех $x \in \overset{\circ}{B}_\delta(a)$, то в этом случае $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 0$.*

Обозначение: $\alpha(x) = \bar{o}(\beta(x))$, $x \to a$. Читается: функция $\alpha(x)$ есть о малое от $\beta(x)$ при $x$, стремящемся к $a$ (в точке $a$).

**Определение 12.** *Функции $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ являются в точке $a$* **бесконечно малыми одного порядка**, *если существуют такие постоянные $C_1$, $C_2$, что $C_1 \cdot C_2 > 0$ и $C_1\alpha(x) \leqslant \beta(x) \leqslant C_2\alpha(x)$ при всех $x$, принадлежащих проколотой $\delta$-окрестности точки $a$ для некоторого $\delta > 0$.*

*В частности, это верно в том случае, если существует такая бесконечно малая в точке $a$ функция $\gamma(x)$ и такая постоянная $C \neq 0$, что $\alpha(x) = \beta(x)(C + \gamma(x))$ при всех $x \in \overset{\circ}{B}_\delta(a)$.*

*Если $\beta(x) \neq 0$ при всех $x \in \overset{\circ}{B}_\delta(a)$, то последнее равенство означает, что $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = C \neq 0$.*

**Определение 13.** *Функции $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ являются* **эквивалентными** *в точке $a$, если существует такая бесконечно малая в точке $a$ функция $\gamma(x)$, что $\alpha(x) = \beta(x)(1+\gamma(x))$ при всех $x \in \overset{\circ}{B}_\delta(a)$.*

*Если $\beta(x) \neq 0$ при всех $x \in \overset{\circ}{B}_\delta(a)$, то последнее равенство означает, что $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1$.*

Обозначение: $\alpha(x) \sim \beta(x)$, $x \to a$.

**Пример 3.** *1) Функция $x^3 = \bar{o}(x)$, $x \to 0$, так как $x^3 = x^2 \cdot x$, где функция $x^2$ является бесконечно малой при $x \to 0$.*

*2) Функции $\alpha(x) = 2x$ и $\beta(x) = \sqrt[3]{x^3 + x^4}$ имеют одинаковый порядок малости при $x \to 0$, так как*

$$\lim_{x\to 0} \frac{2x}{\sqrt[3]{x^3+x^4}} = \lim_{x\to 0} \frac{2x}{x \cdot \sqrt[3]{1+x}} = 2 \lim_{x\to 0} \frac{1}{\sqrt[3]{1+x}} = 2 \neq 0,$$

*так как $\lim\limits_{x\to 0} \sqrt[3]{1+x} = 1$ в силу определения предела по Коши (показать!).*

*3) $x^2 \sim \sqrt{x^4 + x^5}$, $x \to 0$, так как*

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2}{\sqrt{x^4+x^5}} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{x^2\sqrt{1+x}} = 1.$$

**Определение 14.** *Функция $A(x)$ называется* **бесконечно большой в точке** *$a$* **справа (слева)**, *если $\lim\limits_{x\to a+0} A(x) = +\infty$ или $-\infty$ ($\lim\limits_{x\to a-0} A(x) = +\infty$ или $-\infty$), то есть если для любого числа $E > 0$ найдется такое число $\delta = \delta(E) > 0$, что для любой точки $x$ из множества $X \cap (a, a+\delta)$ (из множества $X \cap (a-\delta, a)$) будет выполняться неравенство $A(x) > E$ или $A(x) < -E$ (здесь $X$ — область определения функции $A(x)$).*

Пусть функции $A(x)$, $B(x)$ определены на множестве $X$ и являются бесконечно большими в точке $a$ справа (случай, когда $A(x)$ и $B(x)$ являются бесконечно большими в точке $a$ слева, рассматривается аналогично).

**Определение 15.** *Функция $A(x)$ имеет в точке $a$ справа* **более высокий порядок роста**, *чем функция $B(x)$, если функция $\dfrac{A(x)}{B(x)}$ является бесконечно большой в точке $a$ справа.*

**Определение 16.** *Функции $A(x)$ и $B(x)$ имеют в точке $a$ справа* **одинаковый порядок роста**, *если существует такое число $C \neq 0$, что $\lim\limits_{x\to a+0} \dfrac{A(x)}{B(x)} = C$.*

**Пример 4.** *1) Функция $A(x) = \dfrac{1}{x^2}$ имеет в точке $0$ справа более высокий порядок роста, чем функция $B(x) = \dfrac{1}{x}$, поскольку функция $\dfrac{A(x)}{B(x)}$ является бесконечно большой в точке $a$ справа.*

*2) Функции* $A(x) = \dfrac{1}{x}$ *и* $B(x) = 3 - \dfrac{1}{x}$ *имеют в точке* $0$ *слева одинаковый порядок роста, так как*

$$\lim_{x\to 0-0} \frac{A(x)}{B(x)} = \lim_{x\to 0-0} \frac{1/x}{(3x-1)/x} = \lim_{x\to 0-0} \frac{1}{3x-1} = -1 \neq 0.$$

**Определение 17.** *Говорят, что* $f(x) = O(1)$ *при* $x \to a$ *(на множестве* $A$*), если функция* $f(x)$ *является ограниченной в некоторой проколотой окрестности точки* $a$ *(на множестве* $A$*).*

Читается: функция $f(x)$ есть о большое от единицы при $x$, стремящемся к $a$ (на множестве $A$).

**Определение 18.** *Пусть функции* $f(x)$ *и* $g(x)$ *определены на множестве* $X$*,* $a$ *— предельная точка* $X$ *(множество* $A \subset X$*). Говорят, что* $f(x) = O(g(x))$ *при* $x \to a$ *(на множестве* $A$*), если существует такая функция* $\gamma(x)$*, определенная на множестве* $X$*, что* $\gamma(x) = O(1)$ *при* $x \to a$ *(на множестве* $A$*) и* $f(x) = \gamma(x) \cdot g(x)$ *при всех* $x \in \overset{\circ}{B}_\delta(a) \cap X$ *для некоторого* $\delta > 0$ *(при всех* $x \in A$*).*

Читается: функция $f(x)$ есть о большое от $g(x)$ при $x$, стремящемся к $a$ (на множестве $A$).

**Замечание 2.** *Во всех приведенных выше определениях этого раздела в качестве точки* $a$ *можно брать* $\pm\infty$*.*

**Пример 5.** *Рассмотрим функции* $f(x) = x^2 + 2x + 1$ *и* $g(x) = x^2$*.* $f(x) = O(g(x))$ *при* $x \to +\infty$*, так как* $\dfrac{f(x)}{g(x)} = 1 + \dfrac{2x+1}{x^2} = \gamma(x)$ *и при* $x > 3$ *справедлива оценка* $1 \leqslant \gamma(x) \leqslant 2$*, то есть* $\gamma(x)$ *ограничена в некоторой окрестности точки* $+\infty$*.*

**Замечание 3.** *Если существует* $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = C \neq 0$*, то пишут:* $f(x) = O^*(g(x))$*,* $x \to a$*. Например,* $x^2 + 2x + 1 = O^*(x^2)$*,* $x \to +\infty$*.*

**Теорема 4.** *Пусть функции* $\alpha(x)$*,* $\beta(x)$*,* $\gamma(x)$ *определены на множестве* $X$*; при этом пусть* $\alpha(x) = \bar{o}(1), x \to a$*,* $\beta(x) = \bar{o}(1), x \to a$*,* $\gamma(x) = O(1), x \to a$*. Тогда* $(\alpha(x) \pm \beta(x)) = \bar{o}(1), x \to a$*,* $(\alpha(x) \cdot \beta(x)) = \bar{o}(1), x \to a$*,* $(\alpha(x) \cdot \gamma(x)) = \bar{o}(1), x \to a$*.*

*Доказательство.* Пусть $\{x_n\}$ — последовательность точек множества $X$, такая, что $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = a$, $x_n \neq a$. Тогда последовательности $\{\alpha(x_n)\}$, $\{\beta(x_n)\}$ являются бесконечно малыми, а последовательность $\{\gamma(x_n)\}$ — ограниченной. Значит, последовательности $\{\alpha(x_n) \pm \beta(x_n)\}$, $\{\alpha(x_n) \cdot \beta(x_n)\}$, $\{\alpha(x_n) \cdot \gamma(x_n)\}$ также являются бесконечно малыми. Согласно определению предела функции по Гейне, это означает, что $\lim\limits_{x\to a}(\alpha(x) \pm \beta(x)) = 0$, $\lim\limits_{x\to a}(\alpha(x) \cdot \beta(x)) = 0$, $\lim\limits_{x\to a}(\alpha(x) \cdot \gamma(x)) = 0$. □

**Теорема 5.** *Пусть функции* $f(x)$*,* $g(x)$ *определены на множестве* $X$*,* $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$*,* $\lim\limits_{x\to a} g(x) = c$*. Если существует такое число* $\delta > 0$*, что при всех* $x$ *из множества* $\overset{\circ}{B}_\delta(a) \cap X$ *выполняется неравенство* $f(x) \geqslant g(x)$*, то оно сохраняется и в пределе:* $b \geqslant c$*.*

*Доказательство.* Пусть $\{x_n\}$ — последовательность точек множества $X$, такая, что $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = a$, $x_n \neq a$. Тогда найдется такое натуральное число $N = N(\delta)$, что для всех $n \geqslant N$ выполнено: $x_n \in \overset{\circ}{B}_\delta(a) \cap X$. Значит, $f(x_n) \geqslant g(x_n)$ $\forall n \geqslant N$, следовательно, $b = \lim\limits_{x\to a} f(x) \geqslant \lim\limits_{x\to a} g(x) = c$ (по теореме о предельном переходе в неравенствах для последовательностей). $\square$

**Теорема 6.** *Пусть функции $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$ определены на множестве $X$, причем $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = b$. Если существует такое число $\delta > 0$, что при всех $x$ из множества $\overset{\circ}{B}_\delta(a) \cap X$ выполняется двойное неравенство $f(x) \leqslant h(x) \leqslant g(x)$, то существует $\lim\limits_{x\to a} h(x) = b$.*

*Доказательство.* Пусть $\{x_n\}$ — последовательность точек множества $X$, такая, что $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = a$, $x_n \neq a$. Тогда $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n) = \lim\limits_{n\to+\infty} g(x_n) = b$ и найдется такое натуральное число $N = N(\delta)$, что для всех $n \geqslant N$ выполнено: $f(x_n) \leqslant h(x_n) \leqslant g(x_n)$. Значит, последовательность $\{h(x_n)\}$ сходится и $\lim\limits_{n\to+\infty} h(x_n) = b$. Согласно определению предела функции по Гейне, это означает, что $\lim\limits_{x\to a} h(x) = b$. $\square$